Rozdział III

Zadania statycznie niewyznaczalne

W rozdziale tym zostaną przedstawione stosunkowo proste zadania statycznie niewyznaczalne w przypadkach układów belkowych i ramowych. Zwrócono przy tym szczególną uwagę na porównanie rozwiązań tj. sił wewnętrznych wynikających z różnych przyjęć modeli materiału układu, a w tym nieliniowych sprężystych i lepkosprężystych, czy też teorii lepkiego płynięcia. Ta grupa zadań o stosunkowo prostej konfiguracji daje wyobrażenie o konsekwencjach przyjmowanego często arbitralnie modelu obliczeniowego. W praktyce inżynierskiej dominują bowiem nadal prawie wyłącznie układy liniowo-sprężyste, mimo że rozwój metod numerycznych obliczeń konstrukcji pozwala uwzględnić bardzo złożone modele materiałowe. Sądzę więc, że zasadnym jest porównać rozwiązania tych samych problemów przy różnych modelach materiałowych, tak aby mieć wyobrażenie o skali błędu wynikającego z przyjętego modelu. Różnice są stosunkowo najmniejsze w przypadkach obciążeń czysto mechanicznych, zaś rosną znacznie, kiedy porównujemy wpływy niemechaniczne (temperatura, osiadanie podpór, skurcz), stąd ta grupa zadań jest szerzej prezentowana w tym opracowaniu.

Podstawowe w rozważaniach równania metody sił otrzymujemy z analizy trzech grup zależności, a mianowicie:

- relacji łączących przemieszczenia w układzie δ_k z odkształceniami κ, ε:

$$\delta_k = \int_s \kappa\, M_1\left(X_n = 1\right) ds + \int_s \varepsilon\, N_1\left(X_n = 1\right) ds$$

z których wynikają podstawowe *relacje geometryczne*, czyli warunki zgodności przemieszczeń w układach statycznie niewyznaczalnych

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}(t) = \int_s \kappa\left(t,s\right)\mathbf{a}\left(s\right) ds + \int_s \varepsilon\, \mathbf{c}\left(s\right) ds\,,$$

gdzie $\boldsymbol{\delta} = \left[\delta_1,...\delta_n\right], \mathbf{u}^T = \left[u_1,...u_n\right],\ \mathbf{a}^T = \left[\,M_1\left(X_1 = 1\right),...M_1\left(X_n = 1\right)\right]$ są kolejno uporządkowanymi zbiorami przemieszczeń w układzie podstawowym, przemieszczeniami znanymi w zadaniu statycznie niewyznaczalnym oraz zbiorem funkcji momentów zginających i sił osiowych pochodzących od sił hiperstatycznych $X_n = 1$, n = 1, 2, ... r;

- zależności moment – krzywizna oraz siła osiowa – wydłużenie, które wynikają z *fizycznych własności materiału*,

- związków określających *siły przekrojowe* M i N w zależności od sił hiperstatycznych $\mathbf{X}$ i obciążeń $\mathbf{P}$

$$M = \mathbf{a}^T \mathbf{X} + \mathbf{b}^T \mathbf{P}\ , \ N = \mathbf{c}^T \mathbf{X} + \mathbf{d}^T \mathbf{P}\ ,$$

gdzie $\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T, \mathbf{c}^T, \mathbf{d}^T$, są wektorami, których współrzędne są uporządkowanymi rozkładami momentów zginających od obciążeń jednostkowych, odpowiednio $X_n = 1, P_n = 1$.

W wyniku przekształceń otrzymujemy ogólne postacie równań metody sił w przypadku zadań:

- liniowo sprężystych $\sigma = E\varepsilon$, $\quad \kappa = \dfrac{M}{EJ}$

$$EJ\mathbf{u} = \int_s M\mathbf{a}ds \rightarrow EJ\mathbf{u} = \int_s \left(\mathbf{a}^T \mathbf{X} + \mathbf{b}^T \mathbf{P}\right)\mathbf{a}ds$$

stąd

$$\mathbf{AX} + \mathbf{BP} = EJ\mathbf{u}$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \int_s \mathbf{a}^T \otimes \mathbf{a}ds\ , \quad \left[A_{ij}\right] = \int_s a_i a_j ds\ , \ \ \mathbf{B} = \int_s \mathbf{a}^T \otimes \mathbf{b}ds\ , \ \ \left[B_{ir}\right] = \int_s a_i b_r ds$$

- nieliniowo–sprężystych $\sigma = A\varepsilon^N$, $\quad \kappa = \left(\dfrac{M}{AJ\left(N+1\right)}\right)^n$

$$\left[AJ\left(N+1\right)\right]^n \mathbf{u} = \int_s \left[\mathbf{a}^T \mathbf{X} + \mathbf{b}^T \mathbf{P}\right]^n \mathbf{a}ds$$

- liniowej lepkosprężystości $\sigma = E * d\varepsilon$, $\quad JE * d\kappa = M$

$$JE * d\mathbf{u} = \int_s JE * d\kappa\,\mathbf{a}ds \rightarrow JE * d\mathbf{u} = \int_s \left(\mathbf{a}^T \mathbf{X} + \mathbf{b}^T \mathbf{P}\right)\mathbf{a}ds$$

stąd

$$\mathbf{AX} + \mathbf{BP} = JE * d\mathbf{u}$$

- nieliniowej lepkosprężystości

$$\sigma = A * d\varepsilon^N \rightarrow \kappa = \left(\frac{M * da}{AJ\left(N+1\right)}\right)^n, \ a * dA = H$$

$$\left[AJ\left(N+1\right)\right]^n \mathbf{u} = \int_s \left(M * da\right)^n \mathbf{a}ds$$

stąd

$$[AJ(N+1)]^n \mathbf{u} = \int_s \left[\left(\mathbf{a}^T\mathbf{X} + \mathbf{b}^T\mathbf{P}\right) * da\right]^n \mathbf{a} ds$$

- lepkiego płynięcia $\dot{\varepsilon} = B\sigma^n$, $\dot{\kappa} = B\left(\frac{M}{J(N+1)}\right)^n$

stąd

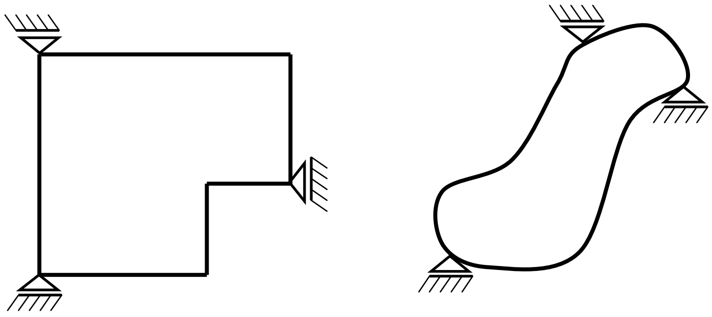
$$\left(J(N+1)\right)^n \dot{\mathbf{u}} = B\int_s \dot{\kappa}\,\mathbf{a} ds \quad \to \quad J(N+1)^n \dot{\mathbf{u}} = B\int_s \left(\mathbf{a}^T\mathbf{X} + \mathbf{b}^T\mathbf{P}\right)^n \mathbf{a} ds$$

W przytoczonych równaniach parametry materiałowe $E, A, B, J, J(N+1), A(t)$ są takie same w całym układzie (nie są funkcjami współrzędnej *s*).

W przypadku wpływów niemechanicznych należy uwzględnić dodatkowo, że $\kappa = \kappa_m + \kappa_o$ i do poprzednio podanych równań dodać całkę pochodzącą od krzywizny niemechanicznej κ_o, stąd $\mathbf{u} = \int_s \kappa_m \mathbf{a} ds + \int_s \kappa_o \mathbf{a} ds$.

ZADANIE 3.1.

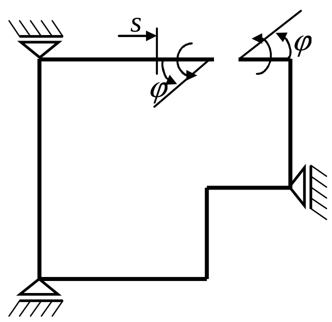
Należy wykazać, że dla ram o zamkniętym konturze wykonanych z nieliniowo sprężystego materiału $\sigma = A\varepsilon^N$ oraz dla $\int_s (M)^n ds = 0$, których przykłady przedstawiono na rys. 3.1a dowolnego obciążenia, zachodzi:



Rys. 3.1a Ramy o konturze zamkniętym.

Rozwiązanie:

Rozetnijmy myślowo zamkniętą ramę. Z warunku ciągłości odkształceń wynika, iż kąt wzajemnego obrotu φ w tym miejscu powinien być równy zero.



Rys. 3.1b

Warunek φ = 0 w przypadku **materiału nieliniowego** o równaniu fizycznym $\sigma = A\varepsilon^{\,N}$ i wyrażeniu na krzywiznę $\kappa = \left(\frac{M}{AJ(N+1)}\right)^n$ prowadzi do relacji

$$\varphi = 0 \rightarrow \int_s \left(\frac{M}{AJ(N+1)}\right)^n 1ds = 0 \quad \rightarrow \quad \int_s (M)^n\, ds = 0$$

Zauważmy, iż zależność ta jest słuszna dla każdej zamkniętej ramy o dowolnym kształcie (tzw. oczko). W przypadku **liniowej sprężystości** zachodzi $\int_s Mds = 0$.

Zależność ta jest prawdziwa również w **liniowej lepkosprężystości**, kiedy $\sigma = E * d\varepsilon$ i $\varepsilon = F * d\sigma$ oraz $\kappa = \frac{1}{J} F * dM$. Wtedy warunek φ = 0 prowadzi do zależności

$$\frac{1}{J}\int_s F * dM\ 1ds = 0 \rightarrow \frac{1}{J}\int_s M\ 1ds * dF = 0 \rightarrow \int_s Mds = 0$$

Natomiast tylko dla sił postaci $P^{\alpha} = P_0^{\alpha} f(t)$, tj. obciążeń narastających według tej samej funkcji zachodzi:

$$\sigma = \varepsilon^{\mathrm{N}} * dA \quad \rightarrow \quad \kappa = \left(\frac{M * dA}{J(N+1)}\right)^n, A * da = H$$

stąd

$$\varphi = 0 \rightarrow \int_s \left(\frac{M * da}{J(N+1)} \right)^n 1ds = 0 \rightarrow \int_s \left(\frac{M_0 f * da}{J(N+1)} \right)^n ds \rightarrow \int_s (M_0)^n ds = 0$$

W przypadku nieproporcjonalnego narastania obciążeń kiedy $P^{\alpha} \neq P_0^{\alpha} f(t)$, ostatnia z całek jest nieprawdziwa.

ZADANIE 3.2.

Należy wykazać, że w zadaniach nieliniowo-sprężystych, nieliniowo lepkosprężystych oraz w statyce lepkiego płynięcia, w których występują tylko obciążenia mechaniczne, siły wewnętrzne są zależne jedynie od wykładników w prawie potęgowym. Siły te są zaś niezależne od pozostałych parametrów materiałowych występujących w równaniach fizycznych.

Rozwiązanie:

Analizować będziemy następujące równania fizyczne i przyporządkowane im relacje moment - krzywizna

$$\sigma = A\varepsilon^N \rightarrow \kappa = \left(\frac{M}{AJ(N+1)} \right)^n \quad , \qquad n = \frac{1}{N}$$

$$\sigma = \int_0^t (\varepsilon(t-\tau))^N dA(\tau) \rightarrow \kappa = \left(\frac{a * dM}{J(N+1)} \right)^n , \qquad a * dA = H$$

$$\dot{\varepsilon} = B(\sigma)^m \rightarrow \dot{\kappa} = B\left(\frac{M}{J(L+1)} \right)^m \qquad L = \frac{1}{m}$$

W każdym z analizowanych przypadków równania metody sił otrzymamy z analizy znanych w zadaniu przemieszczeń o wektorze $\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, ...u_n]$

$$\mathbf{u}(t) = \int_s \kappa(t,s)\, \mathbf{a}(s)\; ds$$

Podstawiając z kolei wyrażenie na:

- nieliniową krzywiznę sprężystą uzyskamy

$$\mathbf{u} = 0 \rightarrow \int_s \left(\frac{M}{AJ(N+1)} \right)^n \mathbf{a} \text{ ds} = 0 \rightarrow \frac{1}{(\mathrm{AJ}(\mathrm{N}+1))^n} \int_s M^n \mathbf{a} \text{ ds} = 0 \rightarrow \int_\mathrm{s} M^n \mathbf{a} \text{ ds} = 0$$

- nieliniową krzywiznę lepkosprężystą $M = M_0 f(t)$ uzyskamy

$$\mathbf{u} = 0 \rightarrow \int_s \left(\frac{M * da}{J(N+1)} \right)^n \mathbf{a}ds = 0 \rightarrow \int_s (M_0)^n \mathbf{a}ds \left(\frac{f * da}{J(N+1)} \right)^n = 0 \rightarrow \int_s (M_0)^n \mathbf{a}ds = 0$$

- krzywiznę w teorii **lepkiego płynięcia** otrzymamy

$$\mathbf{u} = 0 \rightarrow \int_s B\left(\frac{M}{J(L+1)} \right)^m \mathbf{a}ds = 0 \rightarrow \frac{B}{(J(L+1))^m} \int_s M^m \mathbf{a}ds = 0 \rightarrow \int_s M^m \mathbf{a}ds = 0$$

Wykazaliśmy, iż wyznaczenie sił hiperstatycznych wymaga rozwiązania równania macierzowego postaci

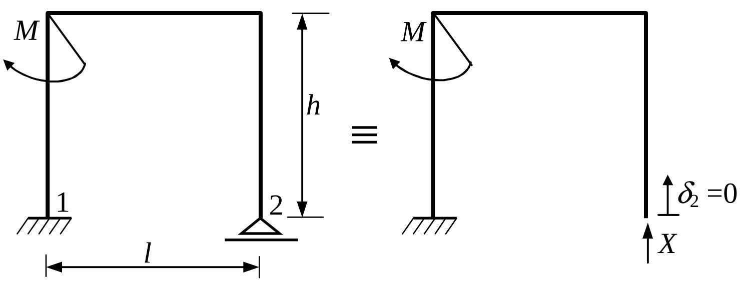
$$\int_s (M)^n \mathbf{a}\, ds = 0 \rightarrow \int_s \left(\mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{X} + \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{P} \right)^n \mathbf{a}\, ds = 0$$

w którym nieliniowość związana jest jedynie z wykładnikiem n. Wynik ten jest natomiast niezależny od parametrów A, $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t,T)$ i momentów $J(N+1)$. Wyjątek tu stanowią zadania lepkosprężyste, kiedy $M(s,t) \neq M_0(s)\, f(t)$.

Z uwagi na fakt, że o wielkościach wewnętrznych decydują tylko obciążenia $\boldsymbol{P}$ oraz siły w wiązach $\boldsymbol{X}$ możemy stwierdzić, że wielkości te będą niezależne od funkcji A, $A(t)$ i B. Oczywiście, w przypadku wpływów niemechanicznych siły te w zasadniczy sposób zależą od wszystkich parametrów równań fizycznych.

ZADANIE 3.3.

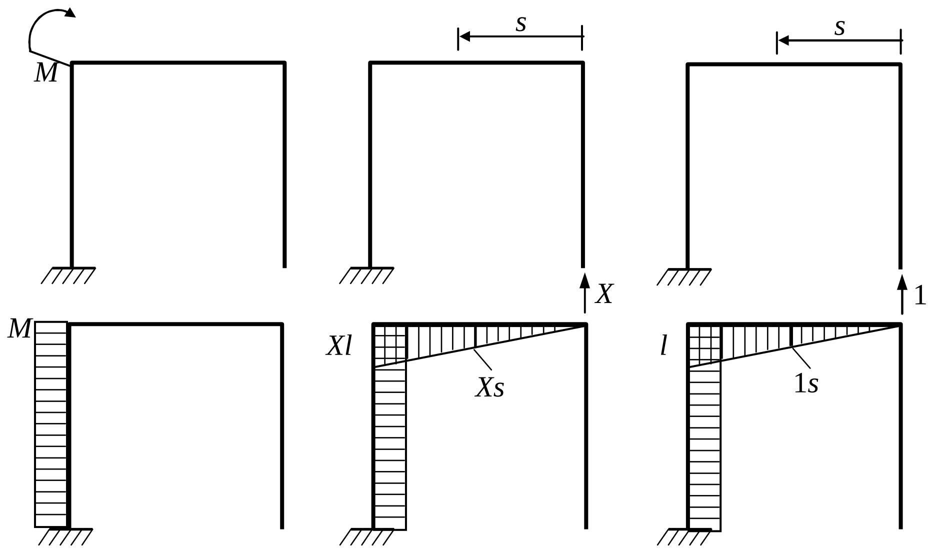
W układzie ramowym jak na rys. 3.3a należy wyznaczyć siłę hiperstatyczną oraz sporządzić wykresy sił przekrojowych. Zadanie należy przeanalizować w zakresie nieliniowo-sprężystym i lepkosprężystym.



Rys. 3.3a

Rozwiązanie:

Przyjmiemy jako wielkość nadliczbową reakcję pionową w podporze 2. Wykresy momentów zginających od obciążeń i sił jednostkowych mają postać



Rys. 3.3b

Spełniając warunek $\delta_2 = 0$ z wykorzystaniem całki Mohra w **zadaniach nieliniowych** $\sigma = A\varepsilon^N \quad \rightarrow \quad \kappa = \left(\frac{M}{AJ(N+1)}\right)^n$ otrzymamy

$$\delta_2 = 0 \rightarrow \int_0^l \left(\frac{Xs}{AJ(N+1)}\right)^n s\, ds + \int_0^h \left(\frac{Xl - M}{AJ(N+1)}\right)^n l\, ds = 0$$

stąd

$$\frac{X^n}{[AJ(N+1)]^n}\left[\frac{l^{n+2}}{n+2} + \left(l - \frac{M}{X}\right)^n lh\right] = 0 \rightarrow \frac{l^{n+2}}{(n+2)lh} + \left(l - \frac{M}{X}\right)^n = 0$$

$$\frac{M}{X} - l = \left[\frac{l^{n+2}}{(n+2)lh}\right]^N$$

Siła hiperstatyczna X_N=X w zadaniu nieliniowo-sprężystym wynosi

$$X_N = M\left\{l+\left[\frac{l^{n+2}}{(n+2)lh}\right]^N\right\}^{-1}$$

Analizując problem w zakresie **lepkiego płynięcia**, z równań fizycznych $\dot{\varepsilon} = B\sigma^m$ i krzywizny $\dot{\kappa} = B\left(\frac{M}{J(L+1)}\right)^m$ oraz warunku geometrycznego $\dot{\delta}_2 = 0$ otrzymamy

$$\delta_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\delta} = 0 \rightarrow B\int_0^l\left(\frac{Xs}{J(L+1)}\right)^m s\,ds + B\int_0^h\left(\frac{Xl-M}{J(L+1)}\right)^m l\,ds = 0$$

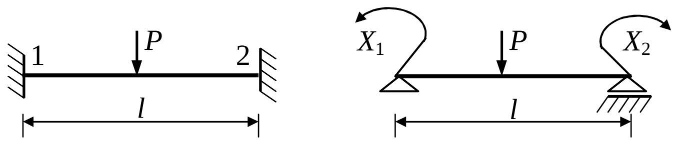
Wartość siły hiperstatycznej X_c w układzie

$$X_c = M\left\{l+\left[\frac{l^{m+2}}{(m+2)lh}\right]^{\frac{1}{m}}\right\}^{-1}$$

Z porównania obu wyników wnosimy, że siły hiperstatyczne przy braku wpływów niemechanicznych są niezależne od funkcji A i B, zależą natomiast od wykładników potęgi w równaniach fizycznych. Można się przekonać, że własność ta przenosi się na układy o dowolnej statycznej niewyznaczalności.

ZADANIE 3.4.

Należy określić siły przekrojowe w belce obustronnie utwierdzonej obciążonej jak na rys. 3.4a. Materiał belki jest nieliniowy fizycznie.

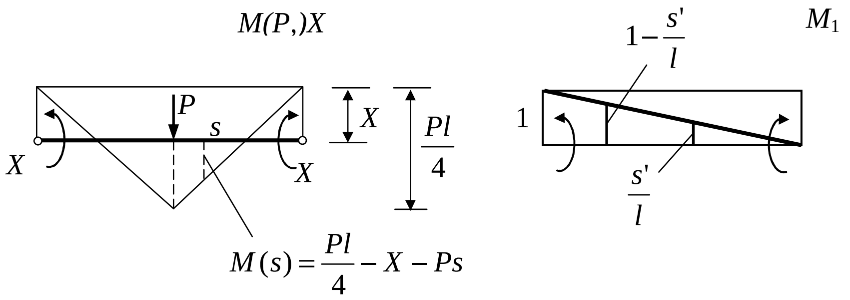


Rys. 3.4a

Dane: P, l, $\sigma = A\varepsilon^N$, $\kappa = \left(\frac{M}{AJ(N+1)}\right)^n$, $N = \frac{1}{n}$

Rozwiązanie:

W obu utwierdzeniach belki zachodzi $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Wynika stąd sposób rozwiązywania zadania przez zastąpienie wiązów momentami $X_1 = X_2 = X$



Rys. 3.4b

Całka Mohra wynikająca z warunku $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ma postać

$$\varphi = 0 \rightarrow \int_0^{l/2} \left(\frac{\frac{P}{2}s - X}{AJ(N+1)} \right)^n \left(-1 + \frac{s}{l} \right) ds + \int_0^{l/2} \left(\frac{\frac{P}{2}s' - X}{AJ(N+1)} \right)^n \left(-\frac{s'}{l} \right) ds = 0 \rightarrow$$

$$\left. \frac{\left(\frac{P}{2}s - X \right)^{n+1}}{\frac{P}{2}(n+1)} \right|_0^{l/2} = \left(\frac{Pl}{4} - X \right)^{n+1} - (-X)^{n+1} = 0 \rightarrow \left(\frac{Pl}{4} - X \right)^{n+1} = (X)^{n+1}$$

Pierwszy z pierwiastków wynosi

$$\frac{Pl}{4} - X = X \rightarrow X = \frac{Pl}{8}$$

$$\varphi = 0 \rightarrow \int_0^{l/2} \left(\frac{M(s)}{AJ(N+1)} \right)^n \left(\frac{s}{l} - 1 \right) ds + \int_0^{l/2} \left(\frac{M(s)}{AJ(N+1)} \right)^n \left(-\frac{s}{l} \right) ds = 0$$

Po uproszczeniach otrzymamy całki postaci $M(s) = \frac{P}{2}s - X$

$$-\int_0^{l/2} M^n ds + \frac{1}{l}\int_0^{l/2} M^n s\, ds - \frac{1}{l}\int_0^{l/2} M^n s ds = 0$$

stąd

$$\int_0^{l/2}\left(\frac{P}{2}s-X\right)^n ds=\left.\frac{2\left(\frac{P}{2}s-X\right)^{n+1}}{P(n+1)}\right|_0^{l/2}=0$$

Proste wyliczenia prowadzą do zależności (n+1 –liczba parzysta)

$$\left(\frac{P}{2}\frac{l}{2}-X\right)^{n+1}-(-X)^{n+1}=0\rightarrow\left(\frac{Pl}{4}-X\right)^{n+1}=(X)^{n+1}$$

W przypadku zadania liniowego warunek $\varphi=0$ daje

$$\varphi=0\rightarrow-\frac{1}{2}\left(\frac{Pl}{4}\cdot\frac{l}{2}\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+Xl\frac{1}{2}=0\rightarrow X=\frac{Pl}{8}$$

W zadaniu nieliniowym dla n=3 zachodzi

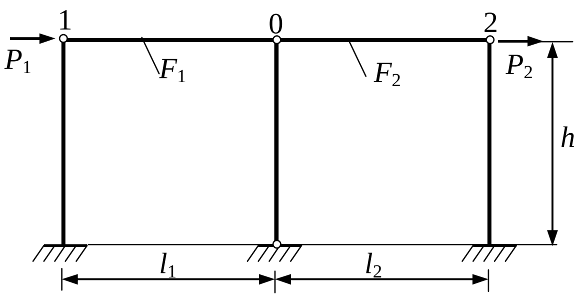
$$\left(\frac{Pl}{4}-X\right)^4-(X)^4=\left(\frac{Pl}{4}-X-X\right)\left(\frac{Pl}{4}-0\right)\left(\frac{Pl}{4}-X-iX\right)\left(\frac{Pl}{4}-X+iX\right)=0$$

$$X=\frac{Pl}{8}$$

Identyczność obu rozwiązań jest wyjątkiem, a nie regułą.

ZADANIE 3.5.

Należy określić siły przekrojowe w układzie prętowym, obciążonym siłami poziomymi P_1 i P_2. Rozważania należy przeprowadzić w zakresie liniowo- i nieliniowo - sprężystym.

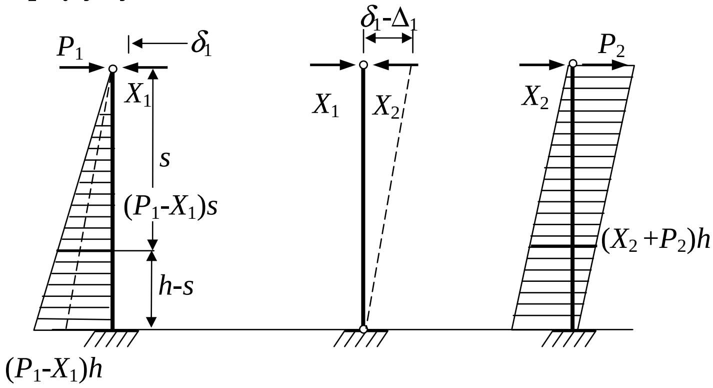


Rys. 3.5a

Dane: $P_1, P_2, l, h,$ $\sigma = A\varepsilon^N, \kappa = \left(\dfrac{M}{AJ(N+1)}\right)^n$, $\varepsilon = \left(\dfrac{N}{AF}\right)^n$

Rozwiązanie:

Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne, a siłą nadliczbową X będzie siła w ryglach. Po zastąpieniu układu trzema podukładami: (słupy, rygle) oraz wykorzystaniu warunku nierozdzielności $\delta_1 - \delta_2 = \Delta_1 + \Delta_2$ otrzymamy w **liniowo-sprężystym zadaniu**



Rys. 3.5b

$$EJ\delta_1 = \frac{(P_1 - X_1)h^2}{2}\cdot\frac{2}{3}h = \frac{(P_1 - X_1)h^3}{3}$$

$$EJ\delta_2 = \frac{(P_2 + X_2)h^2}{2}\cdot\frac{2}{3}h = \frac{(P_2 + X_2)h^3}{3}$$

$$EF_1\Delta_1 = X_1 l_1, \quad EF_2\Delta_2 = X_2 l_2$$

Z analizy równowagi sił w węźle wynika, że X_1=X_2, a więc

$$\frac{(P_1 - X)h^3}{3EJ} - \frac{(P_2 + X)h^3}{3EJ} = \frac{Xl_1}{EF_1} + \frac{Xl_2}{EF_2} \rightarrow X\left(\frac{2}{3}h^3 + l_1 i_1^2 + l_2 i_2^2\right) = (P_1 - P_2)h^3$$

stąd

$$X = (P_1 - P_2)h^3\left(\frac{2}{3}h^3 + l_1 i_1^2 + l_2 i_2^2\right)^{-1}, \quad i_1^2 = \frac{J}{F_1}, \quad i_2^2 = \frac{J}{F_2}$$

W **zadaniu nieliniowym** przemieszczenia $\delta_1, \delta_2, \Delta_1\ i\ \Delta_2$ mają postać

$$\delta_1=\int_0^h\left[\frac{(P_1-X)s}{AJ(N+1)}\right]^n s\,ds=\left[\frac{P_1-X}{AJ(N+1)}\right]^n\frac{h^{n+2}}{n+2},$$

$$\Delta_1=\left(\frac{X}{AF_1}\right)^n l_1,\ \Delta_2=\left(\frac{X}{AF_2}\right)^n l_2$$

$$\delta_2=\int_0^h\left[\frac{(P_2+X)s}{AJ(N+1)}\right]^n s\,ds=\left[\frac{P_2+X}{AJ(N+1)}\right]^n\frac{h^{n+2}}{n+2},$$

Z warunku nierozdzielności otrzymamy

$$\left[\frac{P_1-X}{AJ(N+1)}\right]^n\frac{h^{n+2}}{n+2}-\left[\frac{P_2+X}{AJ(N+1)}\right]^n\frac{h^{n+2}}{n+2}=\left(\frac{X}{A}\right)^n\left(\frac{l_1}{(F_1)^n}+\frac{l_2}{(F_2)^n}\right)$$

a dalej

$$[P_1-X]^n-[P_2+X]^n=[X]^n a^n \text{ gdzie } a^n=\left(\frac{l_1}{(F_1)^n}+\frac{l_2}{(F_2)^n}\right)\frac{(n+2)[J(N+1)]^n}{h^{n+2}}$$

W przypadku szczególnym P_2=0 otrzymamy znacznie prostsze równanie algebraiczne

$$[P_1-X]^n=[Xb]^n$$

które sprowadzimy do postaci

$$[P_1-X]^n-[Xb]^n=0$$

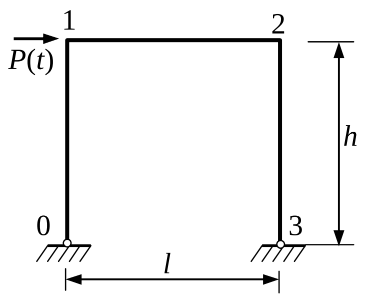
W przypadku n=3 można uzyskać wprost rozwiązanie

$$\left[\frac{P_1-X}{b}\right]^3-[X]^3=\left[\frac{P_1-X}{b}-X\right][X-X_1][X-X_2]=0,$$

$$2X_{1,2}=\frac{P_1-X}{b}\left(1\pm\sqrt{3}\right)$$

ZADANIE 3.6.

W nieliniowej lepkosprężystej ramie przedstawionej na rys. 3.6a działa pozioma siła $P=P_0 f(t)$, gdzie $f(t)$ jest znaną funkcją czasu t. Należy określić rozkład sił przekrojowych w ramie.



Rys. 3.6a

Dane: $P=P_0 f(t)$, l, h, $\sigma(t)=\int\limits_0^t [\varepsilon(t-\tau)]^N \, dA(\tau)$

Zależność moment-krzywizna $\kappa=\left(\dfrac{M*da}{J(N+1)}\right)^n \qquad A*da=H$

Rozwiązanie:

W zakresie **liniowo-sprężystym** mamy tu do czynienia z obciążeniem asymetrycznym działającym na symetryczną ramę. Wykresy momentów zginających są wówczas asymetryczne a jedynymi relacjami w podporach 0, 3 są siły poziome $H_0=H_3=\dfrac{P}{2}$. Powstaje pytanie czy własność ta przenosi się na **zadania nieliniowe**.

Przeanalizujemy w tym celu następujące równoważne zadanie statycznie wyznaczalne (rys. 3.6b).

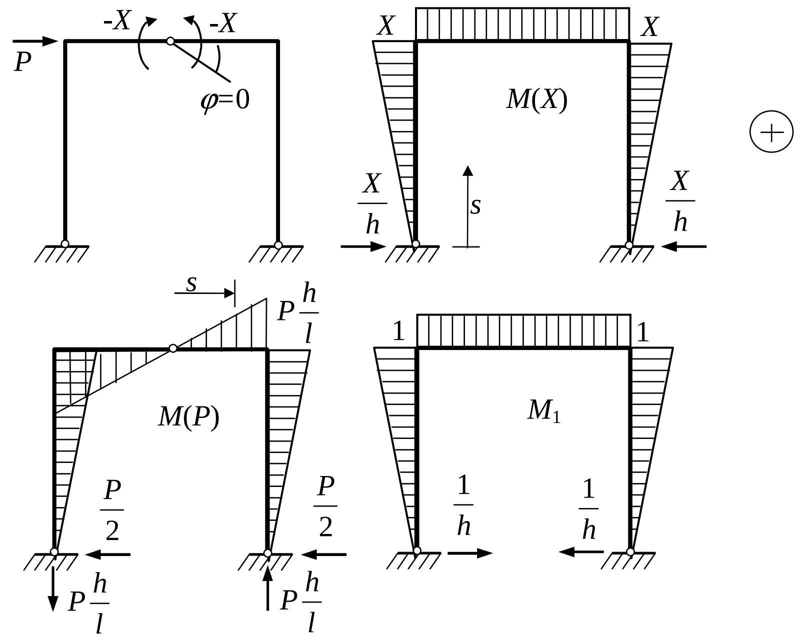
Przyjmując jako wielkość nadliczbową moment X w środku rozpiętości rygla wypiszemy warunek równoważności obu układów. Ma on postać $\varphi = 0$

$$\varphi_A=\int\limits_s \left(\frac{M*da}{J(N+1)}\right)^n M_1 ds=$$

$$=\left\langle \int\limits_0^h \left[\left(\frac{X}{h}-\frac{P}{2}\right)s*da\right]^n \cdot \frac{s}{h} ds + \int\limits_{-l/2}^{+l/2} \left[X+\frac{Phs}{l}*da\right]^n \cdot 1 ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^h \left[\left(\frac{X}{h}+\frac{P}{2}\right)s*da\right]^n \frac{s}{h} ds \right\rangle \frac{1}{\left(J(N+2)\right)^n}=0$$

Jeżeli teraz przyjmiemy, że siła hiperstatyczna $X(t)$ zmieniać się będzie w czasie podobnie jak obciążenie tj. $X=X_0 f(t)$ a druga całka zniknie



Rys. 3.6b

$$\int_{-l/2}^{l/2}\left[\frac{X}{h}+\frac{Ps}{l}\right]^n ds=\frac{l}{P(n+1)}\left(\frac{X}{h}+\frac{Ps}{l}\right)^{n+1}\Bigg|_{-l/2}^{l/2}=$$

$$=\frac{l}{P(n+1)}\left[\left(\frac{X}{h}+\frac{P}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{X}{h}-\frac{P}{2}\right)^{n+1}\right]$$

to równanie φ_A=0 prowadzi do zależności

$$\left[\frac{X}{h}-\frac{P}{2}\right]^n\frac{h^{n+2}}{(n+2)h}+\left[\frac{X}{h}+\frac{P}{2}\right]^n\frac{h^{n+2}}{(n+2)h}=0 \quad\rightarrow\quad \left[\frac{X}{h}-\frac{P}{2}\right]^n=-\left[\frac{X}{h}+\frac{P}{2}\right]^n$$

Z uwagi na fakt, iż n jest liczbą nieparzystą, ponieważ $\sigma(-\varepsilon)$ = $-\sigma(\varepsilon)$ to $\left[\frac{P}{2}-\frac{X}{h}\right]^n=\left[\frac{P}{2}+\frac{X}{h}\right]^n$ a stąd $X = 0$. Warto jednak zauważyć, że o ile w zadaniach klasycznej mechaniki rezultat ten jest oczywisty to w naszych rozważaniach trzeba założyć, iż zmiany siły $X(t) = X_0\,g(t)$ są takie, że $g(t) = f(t)$, a jedna z całek musi zniknąć.